
eBayFarsi

کاربرد مشتق

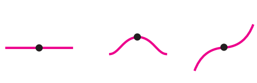
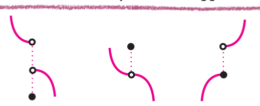
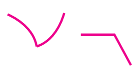
در این فصل به مطالب فصل ۴ کتاب ریاضی عمومی می‌رسیم. بررسی تغییرات تابع و اکسترمم‌ها، جهت تقعر و نقاط عطف، نقاط بحرانی و نهایتاً نمودار تابع، موضوع این قسمت هستند. البته در کتاب درسی، مجانب هم جزء این فصل تلقی می‌شود که شما آن را در فصل خودش می‌بینید. قبل از کاربرد مشتق باید فرمول‌های مشتق را خوب یاد بگیرید و قبل از شروع قسمت نمودارها، باید فصل مجانب را مطالعه کنید. دو سه تست کنکور از این فصل هستند که معمولاً یکی از تقعر و عطف و دیگری از نمودار تابع، پای ثابت‌اند.تست‌های کاربرد مشتق معمولاً جزء سؤالات پرمحاسبه و متوسط به بالا حساب می‌شوند. پس دقت فراوان و تسلط بر تست‌های سال‌های اخیر و کل تمرین‌های کتاب، ضروری است.

نقطه‌ی بحرانی

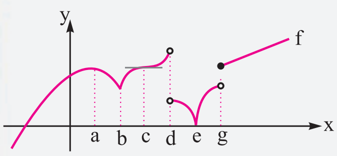
نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ای از دامنه‌ی تابع است که در آن مشتق صفر می‌شود یا وجود ندارد. پس اگر $x=c$ طول نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد یا $f'(c)=0$ است یا $f'(c)$ وجود ندارد.

در چه نقاطی مشتق وجود ندارد؟ هر جا تابع پیوسته نیست؛ هر جا مشتق چپ و راست با هم مساوی نیستند؛ هر جا مشتق بی‌نهایت میل می‌کند (خط مماس موازی محور y ها است).

پس نقاط بحرانی عبارت‌اند از:

	نقاطی که مشتق صفر است	نقاطی که تابع ناپیوسته است	نقاطی که مشتق چپ و راست با هم مساوی نیستند	نقاطی که خط مماس عمودی است
ضابطه	الف) $f'(x)=0$ ب) تمام نقاط دامنه‌ی تابع ثابت	الف) درون براکت عدد صحیح می‌شود. ب) مرز دامنه‌ی چندضابطه‌ای	الف) مرز دامنه‌ی چندضابطه‌ای ب) ریشه‌ی ساده‌ی درون قدرمطلق (نقاط شکستگی نمودار)	الف) عطف قائم ($\sqrt[\text{فرد}]{(x-a)^{\text{فرد}}}$) ب) بازگشتی ($\sqrt[\text{فرد}]{(x-a)^{\text{زوج}}}$)
شکل				

نمودار شکل مقابل مربوط به تابع f است. f چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟



۱) ۳　　۲) ۴
۳) ۵　　۴) ۶

گزینه‌ی۳ در $x=a$ خط مماس افقی است؛ پس مشتق صفر است و نقطه‌ی بحرانی داریم.

در $x=c$ هم همین‌طور است؛ یعنی با دیدن مماس افقی نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی بحرانی داریم.

در $x=b$ نمی‌توانیم مماس رسم کنیم، چون نمودار شکستگی دارد؛ پس این نقطه هم بحرانی است.

در $x=e$ شکل شبیه نقطه‌ی بازگشت است، شیب مماس عدد حقیقی نیست و مشتق نداریم؛ پس این نقطه، بحرانی است.

در $x=g$ تابع ناپیوسته است و مشتق هم ندارد؛ پس این نقطه نیز بحرانی است.

اما در $x=d$، تابع تعریف نمی‌شود (چون نقطه‌ی توپر نداریم)؛ پس این نقطه در دامنه نیست و نمی‌تواند به عنوان نقطه‌ی بحرانی معرفی شود. بنابراین تابع f، ۵ نقطه‌ی بحرانی داشت.

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-4}$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

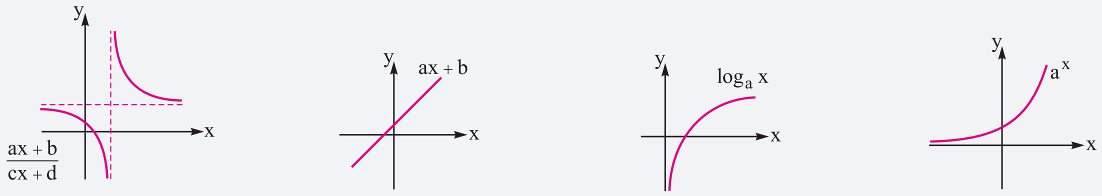
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

گزینه‌ی۲ این تابع کسری است و در دامنه‌اش مشتق دارد. پس نقطه‌ی بحرانی جاهایی خواهد بود که مشتق صفر می‌شود. مشتق بگیریم:

$$y'=\frac{(2x-1)(x^2-4)-(2x)(x^2-x)}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-x^2-8x+4-2x^3+2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-8x+4}{(x^2-4)^2}$$

اگر مشتق را مساوی صفر قرار دهیم از معادله‌ی $x^2-8x+4=0$ دو مقدار برای x داریم $(x=4\pm\sqrt{12})$، پس دوتا نقطه‌ی بحرانی دارد. توجه دارید که $x=2$ و $x=-2$ جزء دامنه‌ی تابع نیستند و بحرانی نمی‌شوند.

توابع نمایی $(y=a^x)$ لگاریتمی $(y=\log_a x)$، هموگرافیک $(y=\frac{ax+b}{cx+d})$ و خطی غیرثابت $(y=ax+b)$، نقطه‌ی بحرانی ندارند؛ چون بر کل دامنه‌ی خود مشتق ندارند و مشتق آن‌ها هرگز صفر نیست. نمودارها را ببینید:



در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{۵}{۳}}-۵x^{\frac{۲}{۳}}$ مجموع طول‌های نقاط بحرانی کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

گزینه‌ی۳ به مشتق تابع نگاه کنید:

$$f'(x)=\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-۵(\frac{۲}{۳})x^{\frac{-۱}{۳}}=\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۱۰}{۳}\frac{۱}{x^{\frac{۱}{۳}}}$$

موافقید که این مشتق در $x=۰$ وجود ندارد. البته از همان اول هم با دیدن $x^{\frac{۲}{۳}}$ یا همان $\sqrt[۳]{x^۲}$ در ضابطه‌ی $f(x)$، می‌توانستیم بگوییم که $x=۰$ نقطه‌ی بحرانی (آن هم از نوع بازگشتی) است. پس $x=۰$ بحرانی شد. حالا ببینیم کِی مشتق صفر است:

$$\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۱۰}{۳}\frac{۱}{x^{\frac{۱}{۳}}}\xrightarrow{\text{را ساده‌کنیم } \frac{۵}{۳}}\frac{x^{\frac{۲}{۳}}}{۱}=\frac{۲}{x^{\frac{۱}{۳}}}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}x=۲$$

پس $x=۲$ هم بحرانی است و جمع طول‌های بحرانی $۲+۰$ یعنی ۲ است.

نقاط عطف قائم و بازگشتی، در تابع با توان کسری کمی پنهان می‌شوند. حواستان باشد که اگر در مشتق، توانِ منفی ایجاد شود، نقطه‌ی بحرانی داریم، چون صفر به توان منفی معنی ندارد.

در تابع با ضابطه‌ی $y=(x-۱)|x|$ اختلاف عرض‌های نقاط بحرانی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) ۲

گزینه‌ی۲ همین اول می‌گوییم $x=۰$ بحرانی است؛ چون ریشه درون قدرمطلق است و نقطه‌ی تیز ایجاد می‌کند. حالا برویم سراغ مشتق؛ بالأخره این $|x|$ یا با علامت + بیرون می‌آید یا با علامت −، یعنی تابع ما برای $x>۰$ به صورت $x(x-۱)$ و برای $x<۰$ به شکل $-x(x-۱)$ است. دقت کنید که این مثبت یا منفی بودن، اثری روی ریشه‌ی f' ندارد (چون ضرب است). پس فقط یکی را در نظر بگیریم: $y=\overbrace{x(x-۱)}^{x^۲-x}\Rightarrow y'=۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

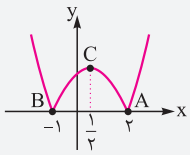
پس طول نقاط بحرانی ۰ و $\frac{۱}{۲}$ شد. عرض آن‌ها $y(۰)=۰$ و $y(\frac{۱}{۲})=\frac{-۱}{۴}$ است و اختلاف عرض‌ها $\frac{۱}{۴}$ خواهد بود.

در توابع $|f(x)|$ تمام ریشه‌های f و f' طول نقاط بحرانی هستند. ریشه‌های ساده‌ی f، مشتق‌ناپذیری ایجاد می‌کنند و ریشه‌های f'، مشتق را صفر می‌کنند.

نمودار $y=|x^۲-x-۲|$ سه نقطه‌ی بحرانی دارد. مساحت مثلثی با رئوس این نقاط چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) $\frac{۲۷}{۴}$ ۴) $\frac{۲۷}{۸}$

گزینه‌ی۴ اگر داخل قدرمطلق را تجزیه کنیم، می‌شود $|(x-۲)(x+۱)|$، پس در $x=۲$ و $x=-۱$، ریشه‌ی ساده داریم و تابع مشتق‌پذیر نیست. بنابراین $A(۲,۰)$ و $B(-۱,۰)$ نقاط بحرانی‌اند. همان‌طور که در مثال قبل دیدیم، مهم نیست قدرمطلق با چه علامتی برداشته می‌شود. پس با $y=x^۲-x-۲$ کار می‌کنیم؛ مشتق آن $y'=۲x-۱$ است. پس $x=\frac{۱}{۲}$ هم بحرانی می‌شود که عرض آن $y(\frac{۱}{۲})=|\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}-۲|=\frac{۹}{۴}$ خواهد بود؛ یعنی سومین نقطه‌ی بحرانی $C(\frac{۱}{۲},\frac{۹}{۴})$ است. شکل تابع را هم می‌بینیم:



قاعده‌ی مثلث ABC برابر $AB=۳$ و ارتفاع آن برابر عرض نقطه‌ی C یعنی $\frac{۹}{۴}$ است. پس داریم:

$$S_{ABC}=\frac{۳\times\frac{۹}{۴}}{۲}=\frac{۲۷}{۸}$$

نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^۳-۳x & x>۰\\ x^۲-x & x\leq ۰\end{cases}$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه‌ی۲ اول ببینیم کجا مشتق صفر است. مشتق تابع $f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۳ & x>۰\\ ۲x-۱ & x<۰\end{cases}$ است. اگر مشتق را مساوی صفر قرار دهیم از ضابطه‌ی بالا $x=۱$ و $x=-۱$ به دست می‌آیند که فقط $x=۱$ قبول است ($x=-۱$ در شرط $x>۰$ قبول نمی‌شود). از ضابطه‌ی پایین هم $x=\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید که با شرط $(x<۰)$ تطبیق ندارد. پس فعلاً فقط $x=۱$ بحرانی شد. سپس می‌رویم سراغ این‌که کجا مشتق وجود ندارد. در این تابعِ چندضابطه‌ای، باید مرز دامنه را ببینیم؛ یعنی در $x=۰$، اول پیوستگی و سپس مشتق‌پذیری را کنترل کنیم. پیوسته است، چون: $\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}f(x)=f(۰)=۰$؛ اما مشتق ندارد چون $f'(۰^+)=-۳$ و $f'(۰^-)=-۱$. پس $x=۰$ هم بحرانی شد و در کل دوتا نقطه‌ی بحرانی دارد.

سؤالات دیگری هم بپرسیم...

الف) در این تابع مختصات نقاط بحرانی کدام است؟ خب! باید x ها را در ضابطه قرار دهیم و y ها را به دست بیاوریم:

$x=۰ \Rightarrow y=(۰)^۲-(۰)=۰ \Rightarrow A(۰,۰)$　　　$x=۱ \Rightarrow y=۱^۳-۳(۱)=-۲ \Rightarrow B(۱,-۲)$

ب) نقاط بحرانی در کدام نواحی‌اند؟

نقطه‌ی A در مبدأ مختصات است و نقطه‌ی B در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد. (طولش مثبت و عرضش منفی است.)

ج) فاصله‌ی دو نقطه‌ی بحرانی از هم چه‌قدر است؟　$طول پاره‌خط = AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}=\sqrt{(۱-۰)^۲+(-۲-۰)^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$

د) شیب خطی که نقاط بحرانی را به هم وصل می‌کند، کدام است؟　$شیب پاره‌خط = m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۲-۰}{۱-۰}=-۲$

اکسترمم‌های مطلق و نسبی

۱ ماکسیمم نسبی نقطه‌ای است که عرض آن بیشتر یا مساوی نقاط اطرافش باشد. یعنی اگر نقطه‌ی $(c,f(c))$ ماکسیمم نسبی تابع f باشد، باید در یک بازه‌ی شامل c بتوانیم بگوییم همواره $f(x) \le f(c)$ است. تمام این شکل‌ها در نقطه‌ی توپر، ماکسیمم نسبی دارند. خودتان در هر مورد دلیل بیاورید که چرا عرض نقطه‌ی c بیشتر یا مساوی نقاط دو طرفش است:

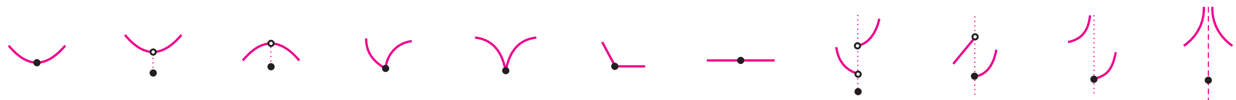
به دو نکته هم دقت کنید:

الف ماکسیمم نسبی تابع باید در هر دو طرف تعریف شود؛ یعنی هم در طرف چپ و هم در طرف راست تابع، نقاط نمودار تابع وجود داشته باشند.

ب تمام این نقاط ماکسیمم نسبی که در شکل‌های بالا می‌بینید، نقطه‌ی بحرانی هم هستند (یعنی در همه‌ی آن‌ها مشتق صفر است یا وجود ندارد).

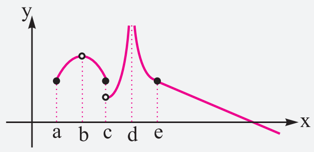
حالا همه‌چیز را برعکس می‌گوییم تا بشود مینیمم نسبی:

۲ مینیمم نسبی نقطه‌ای است که عرض آن کم‌تر یا مساوی نقاط اطرافش باشد. پس باید در یک بازه‌ی شامل c، بتوانیم بگوییم $f(x) \ge f(c)$ است. یعنی نقطه‌ی $(c,f(c))$ از نقاط چپ و راستش پایین‌تر یا هم‌عرض آن‌ها باشد. این مینیمم‌های نسبی را ببینید:



باز هم توجه کنید که تابع باید در اطراف (یعنی هر دو طرف) مینیمم نسبی تعریف شود و تمام این مینیمم‌های نسبی هم نقطه‌ی بحرانی‌اند.

برای صرفه‌جویی، اسم «ماکسیمم و مینیمم» را می‌گذاریم «اکسترمم». پس هر جا گفتیم اکسترمم نسبی، منظورمان ماکسیمم یا مینیمم نسبی است. بنابراین دو شرط گفتیم: تابع باید در دو طرف اکسترمم نسبی‌اش تعریف شود و هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، حتماً بحرانی است.



در نمودار شکل مقابل، .... ماکسیمم نسبی و .... مینیمم نسبی داریم.

۱) ۰,۱　　۲) ۰,۰

۳) ۱,۰　　۴) ۱,۱

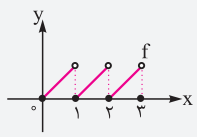
گزینه‌ی۲ در این تابع هیچ اکسترمم نسبی نداریم! یکی‌یکی بررسی کنیم: در $x=a$ تابع از دو طرف وجود ندارد؛ ما چیزی در سمت چپ آن نمی‌بینیم (این نقطه‌ی شروع دامنه است) پس اکسترمم نسبی نیست. در $x=b$ هم که اصلاً نقطه نداریم (توخالی است) پس این هم اکسترمم نیست. در $x=d$ هم نقطه‌ای نداریم (در دامنه‌ی تابع نیست) پس این هم اکسترمم نیست. در $x=c$ نقطه‌ی توپر داریم، از دو طرف هم تابع تعریف شده است، اما این نقطه از اطرافیانش بالاتر یا پایین‌تر نیست. در واقع از سمت چپی‌ها پایین‌تر است و از سمت راستی‌ها بالاتر قرار دارد، پس ماکسیمم یا مینیمم نسبی نیست. در $x=e$ هم تابع ماکسیمم یا مینیمم ندارد، این نقطه از نقاط طرفین خودش بالاتر یا پایین‌تر نیست.

پس هیچ اکسترمم نداشتیم. دقت کنید که نقاط e,c بحرانی‌اند (چون خط مماس نداریم)، اما اکسترمم نیستند.

در نمودار تابع $f(x)=x-[x]$ با دامنه‌ی $۰ \le x \le ۳$ چند نقطه‌ی اکسترمم نسبی وجود دارد؟

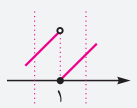
۱) ۶　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) هیچ

گزینه‌ی۲ شکل این تابع را بلدیم:



در $x=۰$ و $x=۳$، یعنی شروع و پایان دامنه، چون تابع از هر دو طرف وجود ندارد، نقطه‌ی اکسترمم نسبی نداریم.

در نقاط $x=۱$ و $x=۲$، مینیمم نسبی داریم چون نقطه‌ی توپر از نقاط اطرافش پایین‌تر قرار دارد. ببینید:

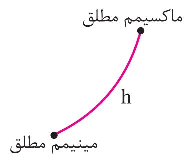


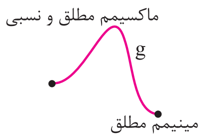
پس ۲ تا مینیمم نسبی داریم و هیچ ماکسیمم نسبی پیدا نشد؛ یعنی در کل دو نقطه‌ی اکسترمم نسبی داریم.

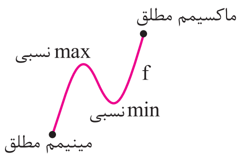
در تابع ثابت، تمام نقاط هم ماکسیمم نسبی و هم مینیمم نسبی هستند، چون هر نقطه از نقطه‌های اطرافش بیشتر یا مساوی و نیز کم‌تر یا مساوی است. پس اگر تابعی در فاصله‌ی (a,b) ثابت باشد، بی‌شمار نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارد.

۳ ماکسیمم مطلق نقطه‌ای است که از تمام نقاط بالاتر یا مساوی باشد. دقت کنید که از تمام نقاط بالاتر است نه از نقاط اطرافش. پس در ماکسیمم مطلق به کل دامنه یا کل بازه‌ای که نمودار را داده‌اند، نگاه می‌کنیم. در مورد ماکسیمم مطلق، نیازی نیست که تابع از هر دو طرف تعریف شود. یعنی نقاطی که در چپ یا راست آن‌ها تابع نداریم هم می‌توانند به عنوان ماکسیمم مطلق (یا مینیمم مطلق) معرفی شوند.

این شکل‌ها را ببینید:







توضیحات را هم بخوانید:

در f، بالاترین عرض در نقطه‌ی انتهایی دامنه است و ماکسیمم مطلق می‌شود؛ پایین‌ترین نقطه هم در ابتدای دامنه قرار دارد. این تابع دوتا اکسترمم نسبی هم دارد که نسبت به اطرافیان خودشان max و min هستند اما در کل نمودار، بالاتر از همه یا پایین‌تر از همه نیستند. پس فقط نسبی‌اند!

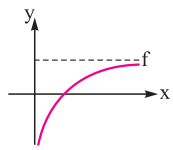
در نمودار g، یک ماکسیمم نسبی داریم که از اطرافیانش بالاتر است و چون از همه نیز بالاتر است، ماکسیمم مطلق هم می‌شود. اما پایین‌ترین نقطه که در انتهای دامنه قرار دارد، چون از دو طرف تابع تعریف نشده فقط اکسترمم مطلق است و نسبی نیست. در h هم اصلاً اکسترمم نسبی نداریم.

این‌طوری جمع‌بندی کنیم:

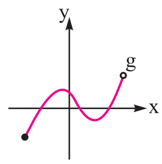
اکسترمم نسبی فقط باید از نقاط دو طرفش بالاتر یا مساوی یا پایین‌تر یا مساوی باشد، وجود هر دو طرف لازم است و سروته دامنه هرگز اکسترمم نسبی نیستند.

اکسترمم مطلق، باید از همه بالاتر یا مساوی یا از همه پایین‌تر یا مساوی باشد و سروته دامنه هم می‌توانند اکسترمم مطلق باشند.

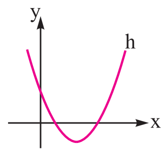
تابع می‌تواند ماکسیمم یا مینیمم مطلق نداشته باشد. هیچ‌کدام از این شکل‌ها ماکسیمم مطلق ندارند:



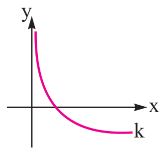
در f بیشترین عرض نداریم.



در g بالاترین نقطه توخالی است.



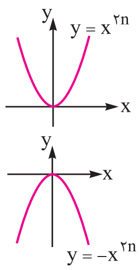
در h بیشترین عرض در ∞ است.



در k بالاترین نقطه در ∞ است.

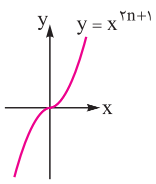
کتاب درسی نمودار تابع‌های x با توابع زوج و فرد را کشیده است.

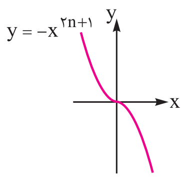
الف تمام توابع x^2, x^4, x^6 و ... و در کل x^{2n} ها شبیه هم هستند؛ یعنی نمودارشان یک شکل متقارن است و در $(0,0)$ مینیمم نسبی و مطلق دارند:



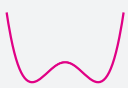
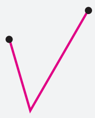
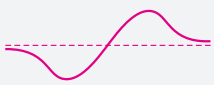
البته اگر $-x^2$ یا $-x^4$ یا ... بود، برعکس می‌شود و یک ماکسیمم نسبی و مطلق در مبدأ دارند:

ب تمام توابع x^3 و x^5 و ... و توان‌های فرد x، یعنی x^{2n+1}، شبیه کلمه‌ی «لر» رسم می‌شوند و هیچ اکسترممی ندارند.





کدام نمودار همه‌ی موارد «ماکسیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق» را دارد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

گزینه‌ی ۴ در نمودار ۱ شاخه‌ها تا $+\infty$ و $-\infty$ می‌روند و ماکسیمم و مینیمم مطلق ندارد.

در ۲ شاخه‌ها تا $+\infty$ ادامه دارند و ماکسیمم مطلق ندارد.

در ۳ مینیمم نسبی داریم ولی ماکسیمم نسبی نداریم. (نقطه‌ای که از اطرافیانش بالاتر باشد، نداریم.)

اما در ۴ دو نقطه‌ی اکسترمم، یکی مینیمم نسبی و مطلق و دیگری ماکسیمم نسبی و مطلق داریم.

در رشته‌ی ریاضی به «نسبی» می‌گویند «موضعی» و به جای «مطلق» هم می‌گویند «سراسری». به هر حال ترجمه‌ی کلمات «local» و «global» در دو رشته‌ی ریاضی و تجربی با هم متفاوت است. ضمناً ریاضی‌ها ادعا می‌کنند که اگر f در فاصله‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، حتماً ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد. ما این‌ها را نداریم و اگر در تست یا جزوه یا کتابی از این حرف‌ها دیدید، فوراً آن را بسوزانید.

تعیین اکسترمم‌های مطلق از روی ضابطه‌ی تابع

تا این‌جا فقط به نمودار تابع نگاه می‌کردیم. برای پیداکردن اکسترمم‌های مطلق از روی ضابطه، باید دنبال بیشترین و کم‌ترین مقادیر y برویم. حالا به این جمله‌ی مهم توجه کنید: «اگر اکسترمم مطلق، نسبی هم باشد حتماً نقطه‌ی بحرانی است و اگر نسبی نباشد، حتماً در ابتدا یا انتهای دامنه است.» جمله‌ی خسته‌ای بود! این‌طوری یاد بگیرید که برای پیداکردن اکسترمم‌های مطلق باید طول تمام نقاط بحرانی را به دست بیاوریم (یعنی ببینیم کجا مشتق صفر است و کجا وجود ندارد)، سپس طول سروته دامنه یا بازه‌ای که سؤال گفته را هم در نظر می‌گیریم و مقدار تابع یعنی y را در تمام این نقاط حساب کنیم. در بین این y ها که به دست می‌آوریم، بیشترین مقدار برابر ماکسیمم مطلق و کم‌ترین مقدار برابر مینیمم مطلق است.

حل این مثال‌ها را دنبال کنید...

بیشترین مقدار تابع $f(x)=x^2-x$ در فاصله‌ی $[-1,1]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

گزینه‌ی ۲ این تابع همه‌جا مشتق دارد و در $x=\frac{1}{2}$ مشتق آن صفر است:

$$f'(x)=2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

سروته دامنه هم $x=1$ و $x=-1$ هستند. عرض این نقاط را حساب کنیم.

$$\text{بحرانی}: x=\frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$\text{ابتدای دامنه}: x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^2-(-1)=1+1=2$$

$$\text{انتهای دامنه}: x=1 \Rightarrow f(1)=1^2-1=0$$

خب! در بین این y ها، بیشترین ۲ و کم‌ترین $-\frac{1}{4}$ است. یعنی بیشترین مقدار تابع ۲ است که در نقطه‌ی ابتدای دامنه یعنی $(-1,2)$ رخ می‌دهد. کم‌ترین مقدار هم در $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ رخ می‌دهد.

منظور از مقدار ماکسیمم یا مینیمم، عرض نقطه است.

در تابع با ضابطه‌ی $y=x^3-x^2-x$، مینیمم مطلق روی دامنه‌ی $0\le x\le 3$ کدام است؟

۱) $-\frac{13}{27}$ ۲) صفر ۳) -1 ۴) ۱

گزینه‌ی ۳ مشتق این تابع $y'=3x^2-2x-1$ است، که همواره وجود دارد. پس نقاط بحرانی در جاهایی هستند که y' صفر شود:

$$y'=3x^2-2x-1=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} x_1=1\,,\,x_2=-\frac{1}{3}$$

دقت کنید که بازه‌ی سؤال $[0,3]$ است پس $x_2=-\frac{1}{3}$ به درد ما نمی‌خورد. عرض‌ها را حساب کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1^3-1^2-1=-1 \\ x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=3 \Rightarrow y=3^3-3^2-3=27-9-3=15 \end{array}\right\} \Rightarrow y_{min}=-1$$

چون این تابع پیوسته است و در این بازه حداقل و حداکثرش ۱− و ۱۵ شد، می‌توانیم بگوییم بُردش در این بازه به صورت $[-1,15]$ است. (یعنی y از ۱− تا ۱۵ تغییر می‌کند.)

بیشترین مقدار تابع $y=\sin^2 x+\cos x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

گزینه‌ی ۴ در توابع مثلثاتی، ممکن است بازه‌ی خاصی در صورت سؤال داده نشود. اشکالی ندارد، ما فقط بحرانی‌ها را حساب می‌کنیم و دیگر کاری به سروته نداریم (سؤالش بی‌سروته است!!)

$$y=\sin^2 x+\cos x$$

$$y'=2\sin x\cos x+(-\sin x)=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)=0$$

اگر $\sin x=0$ باشد، جواب‌های $x=k\pi$ را داریم. اگر $2\cos x-1=0$ باشد، مقدار $\cos x$ برابر $\frac{1}{2}$ است و جواب‌های $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ را داریم.

از جواب $x=k\pi$، در یک دور از ۰ تا 2π، جواب‌های $x=0$ و $x=\pi$ را داریم که مقدار y برابر است با:

$$y(0)=\sin^2 0+\cos 0=0+1=1$$

$$y(\pi)=\sin^2\pi+\cos\pi=0+(-1)=-1$$

از جواب $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ هم مقادیر $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=2\pi-\frac{\pi}{3}$ را قرار می‌دهیم:

$$y(\frac{\pi}{3})=\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

$$y(2\pi-\frac{\pi}{3})=(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

پس بیشترین و کم‌ترین مقادیر تابع $\frac{5}{4}$ و ۱− هستند.

بیشترین مقدار تابع $y=\frac{1}{x^2+2x+3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

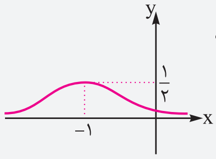
گزینه‌ی ۲ این تابع روی کل $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، نقطه‌ی بحرانی هم جایی است که مشتق آن صفر شود:

$$y'=\frac{0-(2x+2)(1)}{(x^2+2x+3)^2}=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

از سروته دامنه هم حرفی نزده است. چون دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است، می‌توانیم بگوییم سروته دامنه $+\infty$ و $-\infty$ هستند. مقادیر y عبارت‌اند از:

$$x=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{1-2+3}=\frac{1}{2} \quad , \quad x=\pm\infty \Rightarrow y=0$$

پس بیشترین مقدار تابع $y_{max}=\frac{1}{2}$ است. توجه دارید که کم‌ترین مقدار تابع در $\pm\infty$ رخ می‌دهد که به آن دسترسی نداریم؛ پس مینیمم مطلق ندارد. نمودارش را ببینید:



اگر مخرج کسر را به صورت مربع کامل در بیاوریم، ضابطه‌ی تابع این‌جوری می‌شود: $y=\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{(x+1)^2+2}$

حالا ما می‌خواهیم y حداکثر باشد، پس باید مخرج مینیمم شود؛ یعنی قسمت $(x+1)^2$ صفر باشد (کم‌تر که نمی‌شود)، بنابراین $y_{max}=\frac{1}{2}$.

این کار که به عنوان راه دوم در سؤال بالا انجام دادیم، همیشه ممکن نیست. اما تابع‌های محدودی هستند که بیشترین و کم‌ترین مقدار آن‌ها، بدون مشتق‌گیری و نقطه‌ی بحرانی و... پیدا می‌شود. این‌ها را ببینید:

۱) در سهمی رو به بالا داریم: $\underset{a>0}{f(x)=ax^2+bx+c} \Rightarrow y_{min}=y_S=f(\frac{-b}{2a})$

۲) در سهمی رو به پایین، حداکثر مقدار تابع برابر y_S است.

۳) در تابع $y=A\sin x+B\cos x$، حداقل و حداکثر y همواره $-\sqrt{A^2+B^2}$ و $\sqrt{A^2+B^2}$ هستند.

۴) در تابع $y=\frac{ax}{1+x^2}$، مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق $\pm\frac{a}{2}$ هستند.

غر نزنید! (۱) و (۲) را قبلاً در تابع درجه‌دوم دیده بودید. (۳) و (۴) هم در کتاب‌های ریاضی دوم و سوم بوده‌اند که الان حذف شده‌اند، اما امکان دارد مورد سؤال باشند.

بیشترین مقدار تابع $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ کدام است؟

۱) $1+\sqrt{3}$　　۲) ۲　　۳) $\sqrt{3}$　　۴) ۱

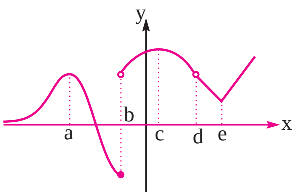
گزینه‌ی۲ با توجه به بند۳ در اشاره‌ی بالا، داریم: $A=1\ ,\ B=-\sqrt{3} \Rightarrow y_{max}=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

نقطه‌ی بحرانی

۱۸۶۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x^3-9x^2+12x+60$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟ *(کتاب درسی)*

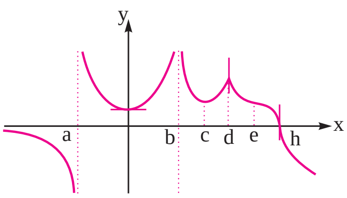
۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) صفر

۱۸۶۴- در نمودار تابع روبه‌رو چند نقطه‌ی بحرانی وجود دارد؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۸۶۵- منحنی روبه‌رو چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

۱۸۶۶- چند نقطه‌ی بحرانی از تابع $g(x)=2x^3-2x^2-16x+1$ در x های مثبت هستند؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) صفر

۱۸۶۷- به ازای کدام مقادیر b تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+bx^2+2x+1$ نقطه‌ی بحرانی ندارد؟

۱) $|b|<3$　　۲) $|b|<6$　　۳) $|b|<\sqrt{6}$　　۴) $|b|<2\sqrt{6}$

۱۸۶۸- نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند، نوع این مثلث، کدام است؟ *(تجربی ۸۵)*

۱) متساوی‌الاضلاع　　۲) فقط متساوی‌الساقین　　۳) فقط قائم‌الزاویه　　۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۱۸۶۹- تابع با ضابطه‌ی $h(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}}$ دارای چند نقطه‌ی بحرانی است؟ *(کتاب درسی)*

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۸۷۰- تابع $f(x)=x^{\frac{۸}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$ در کدام طول‌ها نقطه‌ی بحرانی دارد؟ (کتاب درسی)

۱) $۰,\frac{۱}{۲}$　　۲) $۰,\pm\frac{۱}{۲}$　　۳) $\pm\frac{۱}{۲}$　　۴) $۰,\frac{۱}{۴}$

۱۸۷۱- اگر $f(x)=x^{\frac{۷}{۶}}-\frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}+۵$، آن‌گاه نقطه‌ی بحرانی f با طول مثبت کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $x=۲$　　۲) $x=۱$　　۳) $x=۴$　　۴) $x=۸$

۱۸۷۲- مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^۲-۲۸)\cdot\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟ (تجربی ۸۳)

۱) $\{-۲,۲\}$　　۲) $\{-\sqrt{۷},\sqrt{۷}\}$　　۳) $\{-۲,۰,۲\}$　　۴) $\{-۷,۰,۱\}$

۱۸۷۳- کدام گزینه طول نقطه‌ی بحرانی $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۲x-۳}$ نیست؟

۱) ۱　　۲) ۱-　　۳) ۳　　۴) ۳-

۱۸۷۴- مجموع طول‌های نقاط بحرانی در تابع $f(x)=(x^۳-۳x^۲+۴)^{\frac{۱}{۳}}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱　　۲) ۳　　۳) ۵　　۴) ۱-

۱۸۷۵- در نمودار تابع $y=|x^۲-۴x+۳|$ چند نقطه‌ی بحرانی وجود دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۱۸۷۶- تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=|\sin x|$ بر بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۱۸۷۷- تابع با ضابطه‌ی $y=x|x^۲-۳|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۱۸۷۸- نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|\sqrt[۳]{x-۴}$ رئوس یک مثلث‌اند. مساحت آن چه‌قدر است؟

۱) ۱۲　　۲) ۶　　۳) $۶\sqrt[۳]{۲}$　　۴) $۱۲\sqrt[۳]{۲}$

۱۸۷۹- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}$ بر روی دامنه‌ی خود، کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بی‌شمار

۱۸۸۰- تابع با ضابطه‌ی $y=\begin{cases}x^۲-۳x & x>۱\\ x^۲+۵x & x\leq ۱\end{cases}$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۸۸۱- در نمودار تابع $y=\begin{cases}x^۳+x & x\geq ۰\\ -x^۲+x & x<۰\end{cases}$ چند نقطه‌ی بحرانی وجود دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۸۸۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\text{Ln}(x^۲-۱)$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۸۸۳- تابع با ضابطه‌ی $y=||x|-۲|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) بی‌شمار

۱۸۶۳- گزینه‌ی۲ این تابع f چندجمله‌ای است. پس همه جا مشتق دارد و نقطه‌ی بحرانی‌اش فقط در نقاطی است که مشتق صفر بشود:

$$f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x+۶۰ \Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۱۸x+۱۲$$
$$=۶(x^۲-۳x+۲)=۶(x-۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۱,۲$$

پس در طول‌های ۱ و ۲ دو نقطه‌ی بحرانی داریم.

۱۸۶۴- گزینه‌ی۳ در $x=a$ نقطه‌ی بحرانی داریم چون خط مماس افقی است (یعنی مشتق صفر است).

در $x=b$ تابع ناپیوسته است پس مشتق نداریم و نقطه‌ی بحرانی است.

در $x=c$ نیز خط مماس افقی است و نقطه‌ی بحرانی داریم.

در $x=d$ اصلاً تابع تعریف نمی‌شود. پس نقطه‌ای وجود ندارد که بحرانی باشد.

در $x=e$ هم شکستگی داریم. پس مشتق‌پذیر نیست و نقطه‌ی بحرانی است.

پس شد ۴ تا نقطه‌ی بحرانی.

۱۸۶۵- گزینه‌ی۳ در $x=۰$ مشتق صفر است و نقطه‌ی بحرانی داریم.

در $x=a$ و $x=b$ که تابع تعریف نمی‌شود، پس بحرانی هم نداریم.

در $x=c$ مشتق صفر است و نقطه‌ی بحرانی داریم.

در $x=d$ و $x=h$ خط مماس موازی محور yها است یعنی مشتق $\pm\infty$ می‌شود و نقطه‌ی بحرانی داریم. در $x=e$، شیب مماس صفر یا $\pm\infty$ نیست. پس بحرانی نداریم.

بنابراین $x=۰,c,d,h$ چهارتا نقطه‌ی بحرانی این تابع هستند.

۱۸۶۶- گزینه‌ی۳ باز هم فقط از نوع مشتقِ صفر، بحرانی داریم:

$$g(x)=۲x^۳-۲x^۲-۱۶x+۱ \Rightarrow g'(x)=۶x^۲-۴x-۱۶=۰$$

در این معادله، چون $\frac{c}{a}$ منفی است، دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داریم. یعنی g' در دو نقطه که طول یکی از آن‌ها مثبت و طول دیگری منفی است، صفر می‌شود. حالا چند نقطه‌ی بحرانی در xهای مثبت هستند؟ خب یکی.

اگر دوست دارید طول این نقطه‌ی بحرانی در xهای مثبت، $x_۱=\frac{۲+\sqrt{۱۰۰}}{۶}=۲$ است. طول نقطه‌ی بحرانی دیگرش هم $-\frac{۸}{۳}$ است (که ما آن را نمی‌خواهیم).

۱۸۶۷- گزینه‌ی۳ نقطه‌ی بحرانی ندارد. یعنی مشتقش هیچ‌وقت صفر نمی‌شود. (چون مشتق همیشه دارد!)

$$f(x)=x^۳+bx^۲+۲x+۱ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۲bx+۲$$

این f' قرار است صفر نشود. پس دلتایش منفی است:

$$\Delta=(۲b)^۲-۴(۳)(۲)=۴b^۲-۲۴<۰ \Rightarrow ۴b^۲<۲۴$$
$$\xrightarrow{\div ۴} b^۲<۶ \Rightarrow |b|<\sqrt{۶}$$

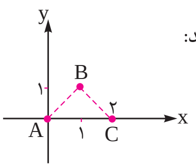
۱۸۶۸- گزینه‌ی۴ این $f(x)$ همه جا مشتق دارد. پس برای نقطه‌ی بحرانی باید برویم دنبال این‌که مشتقش صفر بشود:

$$f(x)=x^۲(x-۲)^۲ \Rightarrow f'(x)=۲x(x-۲)^۲+۲(x-۲)x^۲$$
$$\xrightarrow[\text{فاکتور بگیریم}]{\text{از } ۲x(x-۲)} ۲x(x-۲)(x-۲+x)=۲x(x-۲)(۲x-۲)=۰$$

این مشتق در نقاط $x=۰$، $x=۱$ و $x=۲$ صفر می‌شود. به عرض نقطه‌ها هم نیاز داریم:

$$f(x)=x^۲(x-۲)^۲ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۰^۲(۰-۲)^۲=۰ \Rightarrow A(۰,۰) \\ x=۱ \Rightarrow y=۱^۲(۱-۲)^۲=۱ \Rightarrow B(۱,۱) \\ x=۲ \Rightarrow y=۲^۲(۲-۲)^۲=۰ \Rightarrow C(۲,۰) \end{cases}$$

حالا این سه نقطه‌ی A، B و C را در دستگاه ببینید:



مثلث ABC هم قائم‌الزاویه است $(\hat{B}=۹۰^\circ)$ و هم متساوی‌الساقین است $(BA=BC)$.

۱۸۶۹- گزینه‌ی ۳

در توان‌های کسری، وقتی مشتق می‌گیریم ممکن است توان x منفی شود. اگر این‌طور شد $x=0$ حتماً طول نقطه‌ی بحرانی است (چون صفر به توان منفی معنی ندارد و مشتق نداریم).

$$h(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}-1}-12(\frac{1}{5})x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}-\frac{12}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

حالا از $\frac{6}{5}x^{-\frac{4}{5}}$ فاکتور بگیریم: $h'(x)=\frac{6}{5}x^{-\frac{4}{5}}(x-2)$

از $x^{\frac{1}{5}}$، اگر $x^{-\frac{4}{5}}$ را فاکتور بگیریم، x^1 می‌ماند.

حالا به h' نگاه کنید. در $x=0$ مشتق نداریم و در $x=2$ مشتق صفر است. پس دوتا نقطه‌ی بحرانی داریم.

۱۸۷۰- گزینه‌ی ۲ مشتق را ببینید:

$$f(x)=x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(4x^2-1)$$

اگر از $x^{\frac{5}{3}}$، $x^{-\frac{1}{3}}$ را فاکتور بگیریم، $x^{\frac{6}{3}}$ یعنی x^2 برایمان می‌ماند!

این مشتق در $x=0$ وجود ندارد. هر جا $4x^2-1$ صفر بشود هم بحرانی دارد:

$$4x^2-1=0\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm\frac{1}{2}$$

پس سه‌تا نقطه‌ی بحرانی به طول‌های $\pm\frac{1}{2}$ و ۰ دارد.

۱۸۷۱- گزینه‌ی ۳ مشتق بگیریم:

$$f(x)=x^{\frac{7}{6}}-\frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}}+5$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{7}{2}\times\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{7}{3}x^{-\frac{1}{3}}=0$$

اولاً $x=0$ نقطه‌ی بحرانی است، چون صفر به توان منفی نداریم. ثانیاً ببینیم مشتق کی صفر می‌شود:

$$\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{7}{3}x^{-\frac{1}{3}}=0\Rightarrow\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{۷ ها را بزنیم}}\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}\xrightarrow{\times 6}x^{\frac{1}{6}}=2x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}x^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{3}}=2\Rightarrow x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{1+2}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=2\Rightarrow x=2^2=4$$

۱۸۷۲- گزینه‌ی ۳ مشتق را می‌بینیم:

$$f(x)=(x^2-28)\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=2x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2-28)=0$$

$$\Rightarrow\frac{2x\sqrt[3]{x}(3\sqrt[3]{x^2})+x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$$

$$\xrightarrow{x\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}=xx=x^2}\frac{6x^2+x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$$

$$\Rightarrow\frac{7x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7(x^2-4)}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$$

این مشتق در $x=0$ وجود ندارد؛ وقتی $x=\pm2$ باشد نیز صفر می‌شود. پس نقاط بحرانی $x=0,\pm2$ هستند.

در تابع‌های رادیکالی، مشتق تابع یک عبارت کسری می‌شود. اگر در نقطه‌ای از دامنه، مخرج این کسر صفر باشد، نقطه‌ی بحرانی داریم.

۱۸۷۳- گزینه‌ی ۴ به f' نگاه کنید:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x-3}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}}$$

این f' در $x=1$ صفر می‌شود. پس $x=1$ نقطه‌ی بحرانی است. وقتی $x^2-2x-3=0$ باشد هم مشتق نداریم:

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=3\ ,\ x=-1$$

پس دوتا نقطه‌ی بحرانی دیگر هم پیدا شد. یعنی سه نقطه‌ی بحرانی با طول‌های ۱، ۱- و ۳ داریم و $x=-3$ بحرانی نیست.

مجموع طول‌های نقاط بحرانی این تابع می‌شود $1+(-1)+3=3$.

۱۸۷۴- گزینه‌ی ۱ باز هم مشتق می‌گیریم و می‌بینیم کجاها صفر می‌شود و کجاها وجود ندارد:

$$f(x)=(x^3-3x^2+4)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(3x^2-6x)(x^3-3x^2+4)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}(3x)(x-2)(x^3-3x^2+4)^{-\frac{2}{3}}$$

این مشتق در $x=0$ و $x=2$ صفر می‌شود. هر جا که x^3-3x^2+4 صفر باشد هم مشتق نداریم: $x^3-3x^2+4=0$

برای حل این معادله، عددهای ۱، ۱-، ۲، ۲- و ... را کنترل می‌کنیم. خوشبختانه $x=-1$ جواب است و عبارت بر $x+1$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2+4 & x+1\\ -(x^3+x^2) & x^2-4x+4\\ \quad -4x^2+4 & \\ -(-4x^2-4x) & \\ \quad\quad 4x+4 & \\ \quad -(4x+4) & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow(x^3-3x^2+4)=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$$

حالا چه اتفاقی افتاد؟ عبارت x^3-3x^2+4 در نقاط $x=-1$ و $x=2$ صفر می‌شود. پس این نقاط هم بحرانی‌اند. یعنی ۳ نقطه‌ی بحرانی داریم: $x=-1$، $x=0$ و $x=2$ که مجموع طول‌هاشان می‌شود ۱.

الان در $x=2$ هم مشتق صفر است و هم مشتق وجود ندارد؟!! این یعنی چی؟ خب ماجرا این است که $x=2$ هم صورت f' و هم مخرج f' را صفر می‌کند. در هر حال بحرانی است ولی اگر حساسیت دارید، f' را ساده می‌کنم:

$$f'(x)=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)^2}}=\frac{3x(x-2)}{3\sqrt[3]{((x+1)(x-2)^2)^2}}$$

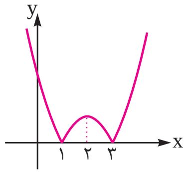
$$=\frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{(x+1)^2\underbrace{(x-2)^4}_{(x-2)^3(x-2)}}}=\frac{x\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}=\frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$$

بفرمایید، این هم از f' ساده‌شده. حالا $x=0$ بحرانی است چون مشتق را صفر می‌کند و $x=2$ و $x=-1$ هم بحرانی‌اند چون مشتق وجود ندارد.

۱۸۷۵- گزینه‌ی ۳ در این‌جا $f(x)$ (تابع درون قدرمطلق) به صورت x^2-4x+3 است. گفتیم نقاط بحرانی جاهایی هستند که f یا f' صفر بشود:

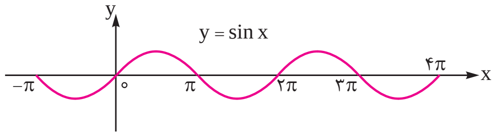
$$\begin{cases}f(x)=x^2-4x+3\Rightarrow(x-1)(x-3)=0\Rightarrow x=1,3\\ f'(x)=2x-4=0\Rightarrow x=2\end{cases}$$

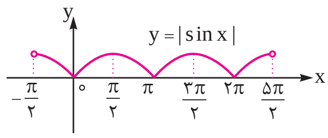
پس سه‌تا نقطه‌ی بحرانی در طول‌های ۱، ۲ و ۳ داریم. شکل هم دیدنی است:



در $x=1$ و $x=3$ مشتق ندارد و در $x=2$ مشتق صفر است.

۱۸۷۶- گزینه‌ی ۴ من با شکل راحت‌تر هستم! نمودار $y=\sin x$ را بلدیم. برای $|\sin x|$ هم باید قسمت پایین محور افقی را به بالا آینه کرد:





در نقاط $x=0$، $x=\pi$ و $x=2\pi$ مشتق ندارد.

در $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ هم مشتق صفر است. روی هم ۵ تا نقطه‌ی بحرانی دارد.

راه قبلی را هم می‌رویم: $y=|\sin x| \Rightarrow f(x)=\sin x$

$$\xrightarrow{\text{نقطه‌ی بحرانی}} \begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow \sin x=0 \xrightarrow{(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})} x=0,\pi,2\pi \\ f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

همان پنج‌تا نقطه‌ی بحرانی به دست آمد.

۱۸۷۷- گزینه‌ی ۴

اگر تابع یک قسمت قدرمطلق داشت و قسمت دیگری هم داشت، بهترین کار این است که وضع قدرمطلق را معلوم کنیم.

$$y=x|x^2-3|=\begin{cases} x(x^2-3) & x^2\geq 3 \\ x(3-x^2) & x^2<3 \end{cases}=\begin{cases} x^3-3x & |x|\geq\sqrt{3} \\ 3x-x^3 & |x|<\sqrt{3} \end{cases}$$

حالا می‌توانیم نقاط بحرانی را پیدا کنیم. در $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق نداریم. در $x=\pm 1$ مشتق صفر است:

$$y'=\begin{cases} 3x^2-3 & |x|>\sqrt{3} \\ 3-3x^2 & |x|<\sqrt{3} \end{cases}=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس ۴ تا نقطه‌ی بحرانی دارد.

۱۸۷۸- گزینه‌ی ۲ خب قرار شد قدرمطلق را برداریم:

$$f(x)=|x|\sqrt[3]{x-4}=\begin{cases} x\sqrt[3]{x-4} & x\geq 0 \\ -x\sqrt[3]{x-4} & x<0 \end{cases}$$

مشتق این تابع به صورت زیر است:

$$y=\pm x\sqrt[3]{x-4} \Rightarrow y'=\pm\left(1\sqrt[3]{x-4}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}}x\right)$$

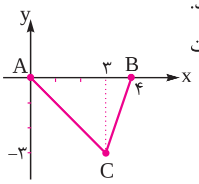
خب این مشتق در $x=4$ وجود ندارد؛ در $x=0$ هم به خاطر وجود $|x|$ مشتق ندارد؛ برویم ببینیم کجا مشتق صفر می‌شود:

$$y'=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x-4}+\frac{x}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}}=0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}}=-\sqrt[3]{x-4}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x=3\sqrt[3]{(x-4)^2}\,(-\sqrt[3]{x-4})=-3(x-4)=-3x+12$$

$$\Rightarrow 4x=12 \Rightarrow x=3$$

پس نقاط بحرانی در $x=0$، $x=4$ و $x=3$ هستند. عرض این نقطه‌ها با استفاده از ضابطه به دست می‌آیند:



$$x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow A(0,0)$$

$$x=3 \Rightarrow y=3\sqrt[3]{3-4}=-3 \Rightarrow C(3,-3)$$

$$x=4 \Rightarrow y=0 \Rightarrow B(4,0)$$

مساحت مثلث برابر است با: $S_{ABC}=\frac{4\times 3}{2}=6$

۱۸۷۹- گزینه‌ی ۱ دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}-\{0\}$ است و همه جا مشتق دارد. پس برویم ببینیم f' در چه نقاطی صفر می‌شود:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}x-1\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{x^2-(1+x^2)}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

این مشتق هیچ جا صفر نمی‌شود. پس نقطه‌ی بحرانی ندارد.

۱۸۸۰- گزینه‌ی ۴

$$y=\begin{cases} x^2-3x & x>1 \\ x^2+5x & x\leq 1 \end{cases}$$

حواستان هست که تابع در $x=1$ پیوسته نیست (حد از بالایی -2 و از پایینی 6 است)، پس $x=1$ بحرانی است.

حالا به مشتق نگاه کنید:

$$y'=\begin{cases} 2x-3 & x>1 \\ 2x+5 & x<1 \end{cases}$$

از ضابطه‌ی بالا در $x=\frac{3}{2}$ مشتق صفر است (توی دامنه‌اش هم هست).

از ضابطه‌ی پایین در $x=-\frac{5}{2}$ مشتق صفر است (توی دامنه‌اش هم هست).

پس $x=\frac{3}{2}$ و $x=-\frac{5}{2}$ هم بحرانی‌اند. روی هم سه‌تا نقطه‌ی بحرانی داریم.

۱۸۸۱- گزینه‌ی ۱ از تجربه‌ی سؤال قبل، اول می‌رویم سراغ مرز دامنه‌ها، یعنی $x=0$. در $x=0$ حد ضابطه‌ی بالایی صفر و حد پایینی هم صفر است. پس تابع پیوسته است.

برویم دنبال مشتق:

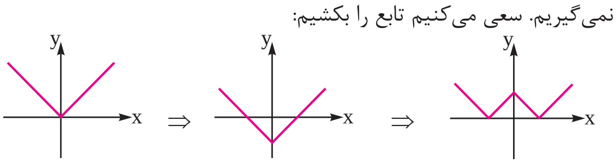
$$y'=\begin{cases} 3x^2+1 & x>0 \\ -2x+1 & x<0 \end{cases}$$

در $x=0$ مشتق راست از ضابطه‌ی بالایی می‌شود ۱، مشتق چپ هم از ضابطه‌ی پایینی ۱ است. پس $x=0$ بحرانی نیست.

ضابطه‌ی بالایی مشتق که هیچوقت صفر نمی‌شود، ضابطه‌ی پایینی هم در $x=\frac{1}{2}$ صفر می‌شود که در دامنه‌اش قرار ندارد. پس هیچی به هیچی. یعنی اصلاً بحرانی نداریم.

۱۸۸۲- گزینه‌ی ۱ مشتق را ببینید: $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$، خب به نظر می‌آید در $x=0$ مشتق صفر است و در $x=\pm 1$ مشتق وجود ندارد. اما صبر کنید، نقطه‌ی بحرانی باید جزء دامنه‌ی تابع (یعنی $\mathbb{R}-[-1,1]$) باشد که هیچ‌یک از این‌ها ($x=0,1,-1$) نیستند. پس نقطه‌ی بحرانی ندارد.

۱۸۸۳- گزینه‌ی ۱ قدرمطلق چیز خوبی نیست، از آن مشتق نمی‌گیریم. سعی می‌کنیم تابع را بکشیم:



تابلو است که در ۳ نقطه مشتق ندارد؛ یعنی ۳ نقطه‌ی بحرانی دارد.


eBayFarsi